2. REALIZABILITATEA ŞI SINTEZA CIRCUITELOR LINIARE

2.1. Introducere

Teoria realizabilităţii are ca obiectiv principal *determinarea condiţiilor necesare şi suficiente* pentru ca o funcţie de circuit sau un sistem de funcţii să aparţină unui circuit, constituit cu un anumit tip de componente: pasive, pasive şi active, etc. Necesitatea acestor condiţii se stabileşte pe baza proprietăţilor funcţiilor de circuit sau ale matricelor corespunzătoare, studiate în capitolul consacrat analizei circuitelor, precum şi pe baza unor considerente energetice. Suficienţa condiţiilor este demonstrată ulterior prin elaborarea metodelor de sinteză a circuitelor după funcţiile date.

Funcţiile de circuit (sau *de sistem*) pot fi clasificate în:

a) *funcţii de intrare*: impedanţa sau admitanţa unui uniport, impedanţa sau admitanţa de intrare la oricare poartă a unei reţele multiport;

b) *funcţii de transfer*: impedanţa sau admitanţa de transfer, funcţii de transfer in tensiune sau în curent.

Clasificarea anterioară este foarte importantă întrucât cele două categorii de funcţii au proprietăţi şi condiţii de realizabilitate distincte. Toate funcţiile de circuit aparţinând unor circuite liniare şi invariante în timp, cu constante concentrate, sunt funcţii raţionale de forma:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{\sum_{k=0}^{m} a_k s^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k s^k} \quad ; \quad a_k,\ b_k \in \Re \tag{1}$$

Sinteza circuitelor se ocupă cu elaborarea metodelor de determinare a circuitelor (uniport, diport, etc) pornind de la funcţia de circuit (sau setul de funcţii) ce satisface condiţiile de realizabilitate. În general circuitele obţinute prin sinteză au numărul minim posibil de elemente de circuit. Schemele obţinute prin minimizarea numărului de componente se numesc *scheme canonice*.

2.2. Realizabilitatea şi sinteza uniporţilor

Considerând un uniport pasiv, cu reprezentarea convenţională din figura 1, acesta poate fi caracterizat prin funcţiile de impedanţă sau admitanţă corespunzătoare: $Z(s)$, respectiv $Y(s)$.

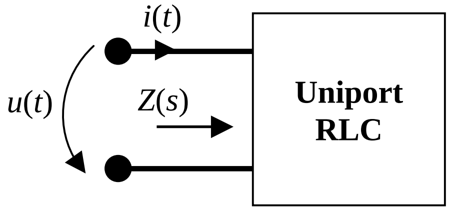

Figura 1. Uniport pasiv.

Problema care se pune este de a găsi *condițiile necesare şi suficiente* pentru ca funcțiile $Z(s)$ sau $Y(s)$ să reprezinte impedanța unui uniport pasiv.

2.2.1. Condiții de realizabilitate Brune

O primă condiție este ca $Z(s)$ să fie o funcție rațională de forma (1), din care, datorită restricției impuse coeficienților a_k şi b_k, rezultă:

$$Z(s) \in \Re \quad \text{pentru } s \in \Re \tag{2}$$

O a doua condiție se deduce din considerente energetice. În acest scop se consideră uniportul alimentat de tensiunea:

$$u(t) = |U| e^{\sigma t} \cos(\omega\, t + \Psi) \quad \text{cu } \sigma > 0 \tag{3}$$

Cu notațiile:

$$U = |U|\, e^{j\Psi} \quad ; \quad I = |\, I\,|\, e^{j\varphi} \quad ; \quad s = \sigma + j\omega \tag{4}$$

şi în ipoteza aplicării tensiunii la momentul $t \to -\infty$, aceasta poate fi exprimată astfel:

$$u(t) = \Re e\left\{\, U e^{st} \right\} \tag{5}$$

Metoda convoluției, aplicată în cazul acestui sistem real liniar şi invariant în timp, permite determinarea răspunsului $i(t)$:

$$i(t) = \Re e\{I e^{st}\} = |\, I\,|\, e^{\sigma t} \cos(\omega t + \varphi) \tag{6}$$

Se remarcă faptul că răspunsul este format doar din componenta de regim forțat (datorită aplicării excitației la $t \to -\infty$), componentă izomorfă cu excitația. Puterea instantanee absorbită de uniport este:

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)\; i(t) = |U|\; |\, I\,|\, e^{2\sigma t} \cos(\omega t + \Psi)\cos(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2}|U|\; |\, I\,|\; e^{2\sigma t}\left[\cos(2\omega t + \varphi + \Psi) + \cos(\Psi - \varphi)\right] = \\ &= \frac{1}{2}|U|\; |\, I\,| \cdot \Re e\left\{ e^{2(\sigma + j\omega)t} \cdot e^{j(\Psi+\varphi)} + e^{2\sigma t} \cdot e^{j(\Psi-\varphi)} \right\} \end{aligned} \tag{7}$$

Energia absorbită de uniport de la $\tau \to -\infty$ până la momentul $\tau \to t$ va fi:

$$\begin{aligned} W_t &= \int_{-\infty}^{t} p(\tau) d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} \Re e\left\{ e^{2(\sigma + j\omega)\tau} \cdot e^{j(\Psi+\varphi)} + e^{2\sigma\tau} \cdot e^{j(\Psi-\varphi)} \right\} d\tau = \\ &= \frac{1}{2}|U|\; |\, I\,| \cdot \Re e \int_{-\infty}^{t} \left\{ e^{2(\sigma + j\omega)\tau} \cdot e^{j(\Psi+\varphi)} + e^{2\sigma\tau} \cdot e^{j(\Psi-\varphi)} \right\} d\tau \end{aligned} \tag{8}$$

Efectuând calculele rezultă:

$$W_t = \frac{1}{2}|U| \;\; |\,\mathrm{I}\,| \cdot \Re e\left\{\frac{e^{j(\Psi+\varphi)} \cdot e^{2(\sigma+j\omega)t}}{2(\sigma+j\omega)} + \frac{e^{j(\Psi-\varphi)} \cdot e^{2\sigma t}}{2\sigma}\right\} \tag{9}$$

Cu notațiile din relația (4) energia absorbită W_t poate fi scrisă într-o formă mai simplă:

$$W_t = \frac{1}{2}e^{2\sigma t} \cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{UI}{2(\sigma+j\omega)}e^{2j\omega t} + \frac{UI^*}{2\sigma}\right\} \tag{10}$$

Uniportul fiind pasiv, trebuie ca energia absorbită să îndeplinească condiția:

$$W_t \geq 0 \;\text{ pentru }\; \forall t \tag{11}$$

Întrucât primul termen din paranteza relației (10) este un vector rotitor, cu viteza de rotație 2ω, pentru anumite valori ale lui t poate deveni pur imaginar. Pentru ca restricția din relația (11), să fie îndeplinită chiar şi în aceste situații, ținând cont de ipoteza $\sigma > 0$, rezultă ca necesară condiția:

$$\Re e\{UI^*\} \geq 0 \;\text{ pentru }\; \sigma > 0 \tag{12}$$

Dacă $\sigma = 0$, excitația din relația (3) devine sinusoidală şi puterea activă absorbită de uniportul pasiv, de asemenea nenegativă, este:

$$P_a = \frac{1}{2}\Re e\{UI^*\} \tag{13}$$

Prin urmare condiția (12) se extinde şi pentru $\sigma = 0$, devenind:

$$\Re e\{UI^*\} \geq 0 \quad \text{pentru} \quad \sigma \geq 0 \tag{14}$$

Condiția mai poate fi scrisă astfel:

$$\Re e\left\{\frac{U}{I} \cdot I \cdot I^*\right\} = |\,I\,|^2 \cdot \Re e\left\{\frac{U}{I}\right\} = |\,I\,|^2 \cdot \mathrm{Re}\{Z(s)\} \geq 0 \;\;\text{ pentru } \sigma \geq 0 \tag{15}$$

ceea ce implică în final următoarea restricție pentru $Z(s)$:

$$\Re e\{Z(s)\} \geq 0 \;\text{ pentru }\; \sigma = \Re e\{s\} \geq 0 \tag{16}$$

S-au obținut două condiții pe care trebuie să le îndeplinească o funcție $Z(s)$ pentru a reprezenta impedanța unui uniport pasiv şi anume:

I. $Z(s)$ *funcție rațională, reală pentru s real*;

II. $\Re e\{Z(s)\} \geq 0$ pentru $\Re e\{s\} \geq 0$. (17)

Dacă necesitatea condițiilor a fost deja demonstrată suficiența lor va rezulta prin sinteză, în sensul că metodele de sinteză conduc totdeauna la un uniport *RLC*, dacă sunt îndeplinite cele două condiții din (17).

Condițiile (17) sunt cunoscute în literatura de specialitate sub denumirea de *condiții de realizabilitate Brune* sau *test Brune* (Otto Brune a fundamentat matematic teoria modernă a realizabilității).

2.2.2. Funcții pozitiv-reale. Proprietăți

Din punct de vedere matematic funcția $Z(s)$, ce îndeplineşte condițiile (17), aparține clasei *funcțiilor pozitiv-reale*.

O *funcție pozitiv-reală* (prescurtat ***p.r.***) $F(s)$ este o funcție analitică de variabilă complexă $s=\sigma+j\omega$, care are următoarele proprietăți:

1. $F(s)$ *este regulată pentru* $\sigma>0$;

2. $F(\sigma)$ *este reală*;

3. $\Re e\{F(s)\geq 0\}$ pentru $\Re e\{s\}=\sigma\geq 0$. (18)

Funcția de impedanță $Z(s)$ a unui uniport pasiv satisface condițiile (18). Se va arăta ulterior că dacă $F(s)$ este o *funcție rațională* ce satisface condițiile 2. şi 3. din (18), atunci ea satisface şi condiția 1. (a se vedea proprietatea **P4** a funcțiilor pozitiv-reale). Altfel spus, condiția **I** din (17) este echivalentă cu condițiile 1 şi 2 din (18).

Observație: Clasa funcțiilor pozitiv-reale este mai largă decât cea formată din impedanțele şi admitanțele de intrare ale unor rețele (uniport, diport, multiport) pasive. Acestea din urmă sunt *funcții raționale* şi prin urmare au un număr finit de singularități.

Din punct de vedere practic este dificil de verificat caracterul pozitiv-real al unei funcții raționale prin utilizarea *testului Brune*. Dificultatea este datorată condiției **II** din (17) care necesită inspectarea părții reale în tot semiplanul drept al planului frecvenței complexe $s=\sigma+j\omega$, inclusiv pe axa imaginară $\{j\omega\}$.

Utilizând investigații matematice referitoare la funcțiile pozitiv-reale, se pot determina unele proprietăți ale acestora, deci şi ale funcțiilor de intrare ale rețelelor pasive, care nu rezultă numai din considerente fizice. De asemenea pe baza proprietăților funcțiilor pozitiv-reale se pot elabora alte seturi de condiții necesare şi suficiente, care să permită o testare mai comodă.

Câteva *proprietăți importante* ale funcțiilor pozitiv-reale sunt prezentate în cele ce urmează şi anume:

P1: *Dacă* $F_1(s)$ *este o funcție p.r., atunci şi funcția* $F_2(s)=1/F_1(s)$ *este funcție p.r.*

Demonstrația constă în a arăta că dacă $F_1(s)$ îndeplineşte condițiile (17), atunci acestea sunt îndeplinite şi de funcția $F_2(s)$. Astfel:

I. $F_1(s)\in\Re$ pentru $s\in\Re$ $\Rightarrow$ $F_2(s)\in\Re$ pentru $s\in\Re$.

II. $F_1(s)=U_1(\sigma,\omega)+jV_1(\sigma,\omega)$ cu $U_1(\sigma,\omega)\geq 0$ pentru $\sigma\geq 0$

$$\Rightarrow\ \Re e\{F_2(s)\}=\Re e\left\{\frac{1}{U_1(\sigma,\omega)+jV_1(\sigma,\omega)}\right\}=\frac{U_1(\sigma,\omega)}{U_1^2(\sigma,\omega)+V_1^2(\sigma,\omega)}\geq 0 \text{ pentru } \sigma\geq 0$$

Consecința P1: *Admitanța* $Y(s)$ *a unui uniport pasiv are aceleaşi proprietăți ca impedanța.*

P2: *Suma a două funcții pozitiv-reale este de asemenea o funcție pozitiv-reală.*
$F_1(s)$, $F_2(s)$ funcții pozitiv-reale $\Rightarrow F(s)=F_1(s)+F_2(s)$ funcție pozitiv-reală.
Demonstrația este evidentă cu ajutorul condițiilor I, II.

P3: *Dacă* $F(s)$ *şi* $w(s)$ *sunt funcții pozitiv-reale atunci şi* $F(w(s))$ *este o funcție pozitiv-reală.*
Demonstrația se bazează pe verificarea condițiilor (17):
I. $F(s)\in\Re$ pentru $s\in\Re$, $w(s)\in\Re$ pentru $s\in\Re \Rightarrow F(w(s))\in\Re$ pentru $s\in\Re$.
II. $F(s)$ funcție pozitiv – reală $\Rightarrow \Re e\{F(s)\}\geq 0$ pentru $\Re e\{s\}\geq 0$.
Nu are importanță notația adoptată pentru variabilă, astfel că se poate scrie:

$$\Re e\left\{F(w)\right\}\geq 0 \text{ pentru } \Re e\{w\}\geq 0 \tag{19}$$

$w(s)$ funcție p.r. implică:

$$\Re e\left\{w(s)\right\}\geq 0 \text{ pentru } \Re e\{s\}\geq 0 \tag{20}$$

Reunind (19) şi (20) rezultă:

$$\Re e\left\{F\left(w(s)\right)\right\}\geq 0 \text{ pentru } \Re e\{s\}\geq 0 \tag{21}$$

Proprietatea 3 este de mare utilitate practică în transformarea unui circuit, ea evidențiind obținerea unui alt circuit realizabil fizic atât timp cât transformarea $w(s)$ este o funcție pozitiv-reală.

P4: *O funcție pozitiv-reală nu are poli în semiplanul drept* (*este analitică în SPD*), *iar polii de pe axa imaginară sunt simpli şi cu reziduurile pozitive*.
Demonstrația se face prin reducere la absurd. Se presupune că există un pol în *SPD* şi va rezulta că funcția nu mai este pozitiv-reală (nu îndeplineşte condițiile (17)).

Fie s_1 *un pol în SPD, de multiplicitate* p şi în $F(s)$ se pune în evidență partea principală a funcției relativă la polul s_1 şi anume:

$$F(s)=\frac{k_p}{(s-s_1)^p}+\frac{k_{p-1}}{(s-s_1)^{p-1}}+.........+\frac{k_1}{s-s_1}+F_r(s) \tag{22}$$

unde $F_r(s)$ este o funcție analitică în vecinătatea polului s_1 (pe un contur Γ).

În imediata vecinătate a polului s_1 (în jurul lui s_1) se poate reprezenta $F(s)$ numai prin primul termen din dezvoltarea (22), acesta fiind un infinit de ordin superior:

$$F(s)\big|_{s\in\Gamma}\approx\frac{k_p}{(s-s_1)^p} \tag{23}$$

Utilizând coordonate polare, se poate scrie:

$$s\in\Gamma \Leftrightarrow s-s_1=\rho e^{j\alpha} \text{ cu } \rho\to 0 \text{ şi } \alpha\in[0,2\pi) \tag{24}$$

Relația (23) devine:

$$F(s)\big|_{s\in\Gamma}=\frac{\left|k_p\right|\cdot e^{j\beta}}{\rho^p e^{jp\alpha}}=\frac{\left|k_p\right|}{\rho^p}\cdot e^{j(\beta-p\alpha)} \tag{25}$$

Verificarea îndeplinirii condiției II din (17) necesită determinarea părții reale:

$$\Re e\{F(s)|_{s\in\Gamma}\} = \frac{|k_p|}{\rho^p}\cos(p\alpha-\beta) \tag{26}$$

Când s parcurge conturul Γ, argumentul $(p\alpha-\beta)$ ia valori în domeniul $[-\beta, 2p\pi-\beta]$, adică are o variație netă de $2p\pi$ radiani. În consecință $\cos(p\alpha-\beta)$ își va schimba semnul de $2p$ ori. Deci ar însemna că $\Re e\{F(s)|_{s\in\Gamma}\}$ ar fi negativ la $\sigma>0$ $(\Gamma\in SPD)$, ceea ce contrazice ipoteza că $F(s)$ este funcție pozitiv-reală.

Fie s_1 *pol pe axa imaginară* pentru $F(s)$. Investigarea semnului părții reale pentru $\sigma\geq 0$ implică:

$$s\in\Gamma_1 \quad\Rightarrow\quad \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad\Rightarrow\quad p\alpha-\beta\in\left[-p\frac{\pi}{2}-\beta, p\frac{\pi}{2}-\beta\right] \tag{27}$$

Argumentul $(p\alpha-\beta)$ parcurge o variație netă de $p\pi$ radiani și $\cos(p\alpha-\beta)$ schimbă semnul. Dacă polul are ordinul 1 de multiplicitate $(p=1)$ și $\beta=0$ atunci:

$$\alpha-\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad\Rightarrow\quad \cos(p\alpha\text{-}\beta)=\cos(\alpha)\geq 0 \tag{28}$$

Deci $F(s)$ *poate avea poli simpli pe axa* $\{j\omega\}$ *și cu reziduurile pozitive*:

$$k_1 = |k_1|\, e^{j\cdot 0} = |k_1| > 0 \tag{29}$$

P5: *Orice funcție pozitiv-reală nu are zerouri în semiplanul drept, iar zerourile de pe axa imaginară, dacă există, sunt neapărat simple și cu derivata funcției în aceste zerouri, pozitivă.*

Proprietatea **P5** este consecința proprietăților **P1** și **P4**. Într-adevăr, dacă $F_1(s)$ este funcție pozitv-reală, atunci $F_2(s)=1/F_1(s)$ este funcție pozitiv-reală și ca atare, întrucât zerourile sale sunt polii lui $F_1(s)$, rezultă că nu pot fi localizate în *SPD*, iar cele de pe $\{j\omega\}$ vor fi simple. Presupunând că $F_1(s)$ are un pol $s_1=j\omega_1$ reziduul lui $F_1(s)$ în acest pol, k_1, este:

$$k_1 = \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=j\omega_1} \;;\; Q(j\omega_1)=0 \;;\; k_1>0 \tag{30}$$

Pe de altă parte, pentru funcția $F_2(s)$ se poate scrie:

$$\left.\frac{dF_2(s)}{ds}\right|_{s=j\omega_1} = \left.\frac{Q'(s)P(s)-P'(s)Q(s)}{P^2(s)}\right|_{s=j\omega_1} = \left.\frac{Q'(s)}{P(s)}\right|_{s=j\omega_1} = \frac{1}{k_1} > 0 \tag{31}$$

Deci derivata lui $F_2(s)$ evaluată în $s=j\omega_1$ este pozitivă.

P6: *Orice funcție pozitiv-reală* $F(s)$ *este raportul a două polinoame Hurwitz.*

Se numește *polinom Hurwitz* un polinom cu coeficienți reali, fără zerouri în semiplanul drept și cu zerouri simple pe axa imaginară. Având coeficienți reali, zerourile nu pot apărea decât în perechi complex conjugate. Factorii unui polinom Hurwitz pot fi de forma:

a) $(s-j\omega_i)\cdot(s+j\omega_i)=s^2+\omega_i^2$ pentru zerourile de pe {jω};

b) $(s+\sigma_k)$ cu $\sigma_k>0$ pentru zerourile de pe {-σ};

c) $(s+\sigma_p+j\omega_p)\cdot(s+\sigma_p-j\omega_p)=s^2+2s\sigma_p+\sigma_p^2+\omega_p^2$ cu $\sigma_\mathrm{p}>0$, pentru zerourile din SPS

d) s pentru zeroul din origine. (32)

Zerourile reale şi cele complex conjugate pot apărea cu orice ordin de multiplicitate în timp ce zerourile pur imaginare pot să existe numai în perechi simple, imaginar conjugate. Din examinarea factorilor posibili ai polinomului Hurwitz se pot desprinde câteva proprietăţi ale acestuia, cu ajutorul cărora se pot identifica uşor polinoamele ce nu sunt Hurwitz.
Aceste proprietăţi sunt:
1. *Toţi coeficienţii sunt reali şi pozitivi*;
2. *Între termenul de grad maxim şi termenul liber nu lipseşte nici un termen, în afară de două situaţii speciale şi anume*:
- poate lipsi termenul liber dacă polinomul are un zero în origine;
- pot lipsi toţi termenii pari sau toţi termenii impari, dacă polinomul are toate zerourile pe axa imaginară (de forma a), sau a) şi d)).

Polinoamele Hurwitz pot fi de trei tipuri:
- *Hurwitz în sens larg*, dacă are toate tipurile de zerouri posibile;
- *strict Hurwitz*, dacă are toate zerourile în *SPS*;
- *Hurwitz degenerat*, dacă are toate zerourile pe axa imaginară.

Dacă factorizarea nu este disponibilă, verificarea caracterului Hurwitz al unui polinom se face apelând la teste speciale, testul cel mai utilizat (datorită comodităţii) fiind *testul Hurwitz*, ce va fi prezentat după analiza funcţiilor de reactanţă.

P7: *Diferenţa între gradele numărătorului şi numitorului unei funcţii pozitiv-reale, scrisă în forma* (1), *este cel mult o unitate, adică*:

$$|n-m|\le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m=n+1 \\ m=n \\ m=n-1 \end{cases} \tag{33}$$

Aceasta este o consecinţă a proprietăţilor **P4** şi **P5**. Dacă m şi n ar diferi cu două unităţi în favoarea numărătorului sau a numitorului, funcţia $F(s)$ ar avea pol dublu la $s\to\infty$, ceea ce contravine proprietăţilor 4 şi 5, care afirmă că polii şi zerourile de pe $\{j\omega\}$ nu pot fi decât simple.

P8. *Orice funcţie pozitiv-reală se poate descompune în suma a două funcţii pozitiv-reale,* $F_1(s)$ si $F_2(s)$, *astfel încât*:
a) $F_1(s)$ *conţine numai contribuţia polilor de pe axa imaginară*;
b) $F_2(s)$ *este olomorfa în SPD şi pe axa imaginară.*

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s) \tag{34}$$

$$F_1(s)=\frac{k_o}{s}+\sum_{\nu=1}^{M}\frac{2k_\nu s}{s^2+\omega_\nu^2}+k_\infty s \tag{35}$$

$$k_o\ge 0;\quad k_\nu\ge 0;\quad k_\infty\ge 0$$

Primul şi ultimul termen din (35) evidenţiază contribuţia polilor de pe $\{j\omega\}$ localizaţi la $s=0$, respectiv $s \to \infty$, iar cei M termeni din mijloc conţin contribuţiile fiecărei perechi de poli imaginar conjugaţi, de forma $s = \pm j\omega_{\nu}$.

Trebuie arătat că ambele funcţii $F_1(s)$ şi $F_2(s)$ sunt funcţii pozitiv-reale. Demonstraţia are la bază testul Brune (17).

Funcţia $F_1(s)$ din (35) satisface evident condiţia I. Pentru verificarea condiţiei II se evaluează partea reală a funcţiei în tot *SPD*, inclusiv pe axa $\{j\omega\}$. Se obţine:

$$\Re e\{F_1(s)\} = \Re e\left\{\frac{k_o}{\sigma + j\omega}\right\} + \sum_{\gamma=1}^{M} \Re e\left\{\frac{2k_{\nu}(\sigma + j\omega)}{(\sigma + j\omega)^2 + \omega_{\nu}^2}\right\} + \Re e\{k_{\infty}(\sigma + j\omega)\} \quad (36)$$

Efectuând calculele rezultă:

$$\Re e\{F_1(s)\} = k_o \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} + \sum_{\nu=1}^{M} \frac{2k_{\nu}\sigma(\sigma^2 + \omega_{\nu}^2 + \omega^2)}{(\sigma^2 + \omega_{\nu}^2 - \omega^2)^2 + 4\sigma^2\omega^2} + k_{\infty}\sigma \quad (37)$$

În ipoteza că reziduurile k_0, k_{ν}, k_{∞} sunt nenegative, se obţine:

$$\Re e\{F_1(s)\} \geq 0 \text{ pentru } \sigma = \Re e\{s\} \geq 0 \quad (38)$$

şi deci condiţia II este de asemenea îndeplinită. Ca atare funcţia $F_1(s)$ este pozitiv-reală. Mai mult, fiecare termen al lui $F_1(s)$ din (35) satisface condiţiile I, II astfel că toate funcţiile elementare din descompunerea (35) sunt funcţii pozitiv-reale.

Funcţia $F_2(s)$ îndeplineşte condiţiile:

a) $\Re e\{F_2(s)\}\big|_{\sigma=o} = \Re e\{F_2(j\omega)\} = \Re e\{F(j\omega)\} \geq 0$ deoarece $\Re e\{F_1(j\omega)\} = 0$ (39)

Observaţie: Toate funcţiile din descompunerea (35), fiind funcţii impare, au partea reală nulă pe axa $\{j\omega\}$ şi deci $F_1(s)$ are de asemenea partea reală nulă la frecvenţe fizice.

b) $F_2(s)$ este olomorfă în *SPD* şi pe conturul acestuia, axa $\{j\omega\}$.

Partea reală a unei astfel de funcţii olomorfe este o funcţie armonică şi în consecinţă ia valoarea minimă pe conturul domeniului de olomorfism (domeniul $\sigma \geq 0$), adică pe axa imaginară. Această proprietate permite extinderea caracterului nenegativ al părţii reale a funcţiei $F_2(s)$ şi în *SPD*, adică:

$$\Re e\{F_2(s)\}\big|_{\sigma>0} > \Re e\{F_2(s)\}\big|_{\sigma=0} \quad \Rightarrow \quad \Re e\{F_2(s)\}\big|_{\sigma\geq 0} \geq 0 \quad (40)$$

În consecinţă funcţia $F_2(s)$ îndeplineşte condiţia II şi de asemenea condiţia I (ca diferenţă a două funcţii raţionale, reale pentru *s* real). Este deci funcţie pozitiv-reală.

P9: *Partea reală pe axa imaginară a unei funcţii pozitiv-reale este o funcţie mărginită.*
Într-adevăr, conform proprietăţii **P8**, funcţiile $F(s)$ şi $F_2(s)$ au aceeaşi parte reală pe axa imaginară şi întrucât $F_2(s)$ nu are poli pe $\{j\omega\}$, rezultă că nici partea sa reală nu are poli pe această axă, fiind deci o funcţie mărginită.

Fiecare dintre aceste proprietăţi este o condiţie necesară, dar nu suficientă pentru ca o funcţie $F(s)$ *să fie pozitiv-reală*. Cunoaşterea lor permite:

1. Excluderea de la testare a unei funcții care nu îndeplinește una dintre aceste proprietăți;

2. Găsirea unui alt set de condiții necesare și suficiente, echivalente cu condițiile Brune, care să permită însă o testare mai comodă (din punct de vedere al rapidității și simplității matematice) a caracterului pozitiv-real al unei funcții.

2.2.3. Condiții de realizabilitate Guillemin

Testul cel mai frecvent utilizat este testul datorat lui Guillemin. Acesta afirmă că o funcție $F(s)$ este pozitiv-reală dacă și numai dacă:

1. $F(s)$ *este o funcție rațională, reală pentru s real*;

2. $F(s)$ *este o funcție analitică în semiplanul drept*;

3. *Polii lui F(s) de pe axa imaginară, dacă există, sunt simpli și cu reziduurile în acești poli, pozitive*;

4. $\Re e\{F(j\omega)\} \geq 0$ pentru $\forall \omega \in \Re$. (41)

Condițiile sunt necesare deoarece sunt proprietăți ale funcțiilor pozitiv-reale. Sunt suficiente deoarece sunt echivalente cu condițiile Brune. Într-adevăr condițiile 1 din (17) și (40) sunt identice, în timp ce condițiile 3, respectiv 2 și 4 din (40), asigură caracterul pozitiv-real al funcțiilor $F_1(s)$, respectiv $F_2(s)$ din descompunerea (34), ca la proprietatea **P8** a funcțiilor pozitiv-reale, deci și caracterul pozitiv-real al funcției $F(s)$ conform proprietății **P2**. În consecință, condițiile 2, 3, 4 din (40) sunt echivalente cu condiția 2 din (17).

Observații:
a) Testul este mai comod deoarece nu mai implică investigarea caracterului nenegativ al părții reale în tot semiplanul drept, ci numai pe axa $\{j\omega\}$.
b) Condițiile 2, 3, 4 din testul Guillemin mai sunt cunoscute în literatura de specialitate sub denumirea de **A, B, C**-ul funcțiilor pozitiv-reale.

2.2.4. Funcții de reactanță

Funcțiile de intrare ale circuitelor pasive cu două tipuri de elemente: *LC*, *RC* și *RL* sunt funcții pozitiv-reale care au proprietăți particulare. Dacă uniportul din figura 1 este alcătuit numai din elemente *LC*, se pune întrebarea: Ce condiție trebuie impusă funcției pozitiv-reale $Z(s)$ astfel încât aceasta să caracterizeze un uniport pur reactiv? Răspunsul la această întrebare este obținut pe bază energetică, remarcând faptul că puterea activă absorbită de uniport în regim sinusoidal este nulă. Aceasta, în conformitate cu relația (13), implică restricția:

$$\Re e\{Z(j\omega)\} = 0 \tag{42}$$

Prin definiție, o funcție pozitiv-reală pur imaginară pe axa imaginară se numește funcție LC sau funcție de reactanță. Condiția necesară și suficientă pentru ca o funcție rațională să constituie impedanța sau admitanța unui uniport *LC* este că acea funcție să fie o funcție de reactanță.

Proprietățile funcțiilor de reactanță

Acestea decurg din restricția suplimentară (42) impusă funcției pozitiv-reale $Z(s)$. Unele dintre acestea, utile pentru testarea funcțiilor de reactanță sunt prezentate în continuare şi anume:

P1: *Dacă* $F_{LC}(s)$ *este o funcție de reactanță, atunci şi* $1/F_{LC}(s)$ *este o funcție de reactanță.*

$$\Re e\{F_{Lc}(j\omega)\}=0 \Rightarrow \Re e\left\{\frac{1}{F_{LC}(j\omega)}\right\}=0 \tag{43}$$

Această proprietate permite tratarea la fel atât a admitanțelor cât şi a impedanțelor de intrare.

P2: *Dacă* $F_1(s)$ şi $F_2(s)$ *sunt funcții de reactanță, atunci şi* $F(s)=F_1(s)+F_2(s)$ *este funcție de reactanță.*

P3: Dacă $F_{LC}(s)$ **şi** $w_{LC}(s)$ sunt două funcții de reactanță, atunci şi $F_{LC}(w_{LC}(s))$ este de *asemenea funcție de reactanță.*
Proprietatea este foarte importantă pentru obținerea filtrelor prin transformări de frecvență deoarece evidențiază realizabilitatea fizică a noilor tipuri de filtre atât timp cât schimbarea de frecvență se exprimă printr-o funcție de reactanță.

P4: *Orice funcție de reactanță poate fi dezvoltată într-o sumă de funcții elementare, sub următoarea formă*:

$$F_{LC}(s)=\frac{k_o}{s}+\sum_{\nu=1}^{M}\frac{2k_\nu s}{s^2+\omega_\nu^2}+k_\infty s \qquad \text{cu: } k_o\ge 0\,;\quad k_\nu \ge 0\,;\quad k_\infty \ge 0 \tag{44}$$

Descompunerea este o consecință a proprietății **P8** a funcțiilor pozitiv-reale. Restricția ca funcția pozitiv-reală $F(s)$ din relația (34) să fie funcție de reactanță implică:

$$\Re e\{F(j\omega)\}=0 \quad \Rightarrow \quad \Re e\{F_2(j\omega)\}=0 \tag{45}$$

Ca atare, funcția $F_2(s)$ (fiind analitică în *SPD* şi pe conturul său, axa $\{j\omega\}$, cu partea reală nulă pe contur) este o constantă: $F_2(s)=K$. Constanta trebuie însă să fie reală pe axa reală şi pur imaginară pe axa imaginară. Deci constanta nu poate fi decât $K=0$ şi în consecință ipoteza că $F(s)$ din relația (34) este funcție de reactanță, determină $F_2(s)=0$. Drept urmare $F(s)$ se reduce doar la $F_1(s)$, cu descompunerea din relația (35). Acest raționament justifică dezvoltarea dată în relația (44) pentru o funcție de reactanță.

P5: *Scrierea unei funcții raționale* $F(s)$ *în forma* (44) *constituie condiția necesară şi suficientă pentru a fi funcție de reactanță.* Este necesară deoarece constituie o consecință a definiției funcției de reactanță. Este suficientă deoarece fiecare termen din dezvoltarea (44) este funcție de reactanță şi deci suma termenilor, în virtutea proprietății **P2** este funcție de reactanță.

P6: *La frecvenţe fizice* $(s = j\omega)$ *partea reactivă a unei impedanţe sau admitanţe LC este o funcţie crescătoare.*
Evaluând $F_{LC}(s)$ din (44) pe axa $j\omega$ se poate scrie:

$$F_{LC}(j\omega) = jX_{LC}(\omega) \tag{46}$$

$$\text{cu}: \ X_{LC}(\omega) = -\frac{k_o}{\omega} + \sum_{\nu=1}^{M} \frac{2k_\nu \omega}{\omega_\nu^2 - \omega^2} + k_\infty \cdot \omega \tag{47}$$

$$\frac{dX_{LC}(\omega)}{d\omega} = \frac{k_o}{\omega^2} + \sum_{\nu=1}^{M} \frac{2k_\nu(\omega_\nu^2 + \omega^2)}{(\omega_\nu^2 - \omega^2)^2} + k_\infty \tag{48}$$

Toţi termenii derivatei funcţiei sunt pozitivi şi în consecinţă $X_{LC}(\omega)$ este strict crescătoare pentru orice fecvenţă, cu excepţia polilor: $\omega = 0$; $\omega = \pm\omega_\nu$; $\omega \to \infty$ evidenţiaţi în expresia (47).

P7: *Orice funcţie de reactanţă are frecvenţele critice* (*poli şi zerouri – prescurtat* **pz**-*uri*) *simple şi alternante pe axa imaginară, adică poate fi scrisă factorizat astfel*:

$$F_{LC}(s) = H \frac{(s^2 + \omega_{01}^2)(s^2 + \omega_{02}^2)\cdots(s^2 + \omega_{0n}^2)\overline{(s^2 + \omega_{0,n+1}^2)}}{s \cdot (s^2 + \omega_{x1}^2)(s^2 + \omega_{x2}^2)\cdots(s^2 + \omega_{xn}^2)} \tag{49}$$

$$\text{cu}: \ H > 0 \ ; \ 0 \le \omega_{01} < \omega_{x1} < \ldots < \omega_{0i} < \omega_{xi} < \ldots < \omega_{0n} < \omega_{xn} < \omega_{0,\,n+1} < \infty$$

Într-adevăr, din (44) rezultă că funcţia $F_{LC}(s)$ are toţi polii situaţi pe axa $\{j\omega\}$, şi aceştia sunt simpli. În baza proprietăţii **P1**, funcţia $1/F_{LC}(s)$ este de asemenea funcţie de reactanţă şi deci polii săi, care sunt zerouri pentru $F_{LC}(s)$, vor fi tot simpli şi plasaţi pe $\{j\omega\}$. Evaluând $F_{LC}(s)$ din (49) la frecvenţe fizice rezultă necesitatea alternanţei polilor şi zerourilor, în caz contrar (două zerouri succesive sau doi poli succesivi), funcţia $X_{LC}(\omega)$ n-ar respecta proprietatea **P6**. Constanta H trebuie să fie pozitivă deoarece ea reprezintă reziduul lui $F_{LC}(s)$ în polul de la infinit.

Observaţii:

a) Factorul s asigură imparitatea funcţiei $F_{LC}(s)$ şi deci partea reală nulă la frecvenţe fizice. În situaţia $\omega_{01} = 0$, factorul s se mută la numărător.

b) Ultimul factor din expresia (49) poate lipsi şi în această situaţie gradul numitorului va fi cu o unitate mai mare decât al numărătorului, funcţia având un zero la infinit.

P8: *Punerea unei funcţii raţionale în forma factorizată* (49) *reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca aceea funcţie să fie funcţie de reactanţă.*
Necesitatea a fost justificată anterior. Suficienţa se demonstrează uşor, arătând că $F_{LC}(s)$ de forma (49), ce poate fi dezvoltată într-o sumă de funcţii elementare ca în relaţia (44), are toate reziduurile k_i nenegative în ipoteza alternanţei pz-urilor. Astfel, expresia pentru evaluarea reziduului în polul $s = j\omega_{xi}$:

$$k_i = (s - j\omega_{xi})F_{LC}(s)\Big|_{s=j\omega_{xi}} = H \frac{(\omega_{01}^2 - \omega_{xi}^2)\cdots(\omega_{0,\,i+1}^2 - \omega_{xi}^2)\cdots(\omega_{0,\,n+1}^2 - \omega_{xi}^2)}{j\omega_{xi}(\omega_{x1}^2 - \omega_{xi}^2)\cdots(2j\omega_{xi})\cdots(\omega_{xn}^2 - \omega_{xi}^2)} \tag{50}$$

conține *i* factori negativi la numărător şi tot *i* factori negativi la numitor, de unde rezultă $k_i > 0$.

P9: *Orice funcție de reactanță este o funcție impară în s, fiind raportul dintre un polinom par şi unul impar sau invers, adică*:

$$F_{LC}(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \text{ sau } F_{LC}(s) = \frac{N(s)}{M(s)} \text{ cu: } M(s) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} s^{2k}; \quad N(s) = \sum_{k=1}^{n} b_{2k-1} s^{2k-1} \text{ si } a_{2k} > 0 \text{ ; } b_{2k-1} > 0 \tag{51}$$

P10: *Orice funcție de reactanță are întotdeauna frecvențe critice* (*pol sau zero*) la $s = 0$ şi $s \to \infty$. Ultimele două proprietăți sunt consecințe ale proprietății **P7**.

2.2.5. Testarea funcțiilor de reactanță

Din examinarea proprietăților funcțiilor de reactanță se desprind două seturi de condiții necesare şi suficiente, care permit testarea funcțiilor de reactanță. Astfel, din proprietățile **P4** şi **P5**, respectiv **P7** şi **P8** se obțin:

Testul 1

$F(s)$ ***este funcție de reactanță dacă şi numai dacă***:

1. $F(s)$ *este funcție rațională, reală pentru s real*;

2. $F(s)$ *are toți polii pe* $\{j\omega\}$, *simpli şi cu reziduurile pozitive*;

3. $\Re e\{F(j\omega)\} = 0$ *sau, în mod echivalent,* $F(s)$ *funcție impară.* (52)

Testul II

$F(s)$ ***este funcție de reactanță dacă şi numai dacă***:

1. $F(s)$ *este funcție rațională, reală pentru* $s \in \Re$;

2. $F(s)$ *are pz-urile numai pe* $\{j\omega\}$, *simple şi alternante*;

3. $F(s)$ *are în origine un pol sau zero* ($F(s)$ *impară*);

4. *Constanta de multiplicare* (*H*) *este pozitivă.* (53)

2.2.6. Sinteza funcțiilor de reactanță

Sinteza constă în găsirea uniportului *LC* pornind de la funcția de impedanță (sau de admitanță) ce satisface condițiile necesare şi suficiente ale funcțiilor de reactanță.

Metodele de sinteză pot fi clasificate în două categorii:

a) *Metode bazate pe dezvoltarea în fracții parțiale, denumite şi* ***metode Foster***.

b) *Metode bazate pe dezvoltarea în fracție continuă, denumite* ***metode Cauer***.

Metoda Foster **I** constă în dezvoltarea funcției $Z(s)$ într-o sumă de fracții elementare, realizarea fiecărei fracții printr-un uniport elementar şi conectarea acestora în serie. Prelucrând dezvoltarea lui $Z(s)$ de forma (44), se obține:

$$Z(s)=\frac{k_o}{s}+k_\infty s+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2k_\nu s}{s^2+\omega_\nu^2}=\frac{k_o}{s}+k_\infty s+\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{\dfrac{s}{2k_\nu}+\dfrac{\omega_\nu^2}{2k_\nu s}} \tag{54}$$

$$\text{cu}: \quad k_o=sZ(s)\big|_{s=o}\,; \quad k_\infty=\left.\frac{Z(s)}{s}\right|_{s\to\infty}\,; \quad 2k_\nu=\left.\frac{(s^2+\omega_\nu^2)Z(s)}{s}\right|_{s^2=-\omega_\nu^2} \tag{55}$$

Metoda Foster **II** constă în dezvoltarea funcției $Y(s)$ în sumă de fracții elementare, realizarea fiecărei fracții elementare printr-un uniport elementar şi conectarea acestora în paralel. Repetând procedura ca în relația (54), rezultă:

$$Y(s)=\frac{k_o}{s}+k_\infty s+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2k_\nu s}{s^2+\omega_\nu^2}=\frac{k_o}{s}+k_\infty s+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\dfrac{s}{2k_\nu}+\dfrac{\omega_\nu^2}{2k_\nu s}} \tag{56}$$

Metoda Cauer **I** constă în extragerea succesivă a polului de la infinit din $Z(s)$ sau $Y(s)$. Presupunând că $Z(s)$ are pol la infinit, se poate scrie:

$$Z(s)=k_\infty^{(1)}s+Z_1(s) \text{ cu } Z_1(s)=\frac{k_o}{s}+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{2k_\nu s}{s^2+\omega_\nu^2} \tag{57}$$

Cum pentru $s\to\infty$ funcția $Z_1(s)\to 0$, înseamna că $Y_1(s)$ are pol la infinit, astfel că extrăgându-l, $Z(s)$ din (57) devine:

$$Z(s)=k_\infty^{(1)}s+\frac{1}{Y_1(s)}=k_\infty^{(1)}s+\frac{1}{k_\infty^{(2)}s+Y_2(s)} \tag{58}$$

Repetând extragerea polului de la infinit şi notând $k_\infty^{(i)}=e_i$, se obține în final dezvoltarea în fracție continuă de mai jos:

$$Z(s)=e_1s+\cfrac{1}{e_2s+\cfrac{1}{e_3s+\ddots+\cfrac{1}{e_{2n}s}}}=e_1s+\frac{1\,|}{|e_2s}+\frac{1\,|}{|e_3s}+\cdots+\frac{1\,|}{|e_{2n}s} \tag{59}$$

În ultimul membru din expresia (59) este dată o scriere convențională pentru dezvoltarea în fracție continuă. Această dezvoltare se obține printr-un algoritm care necesită scrierea polinoamelor $M(s)$ şi $N(s)$ din (51) în ordine descrescătoare, deoarece reziduul în polul de la infinit, care se calculează în fiecare etapă, este raportul coeficienților termenilor de gradul cel mai mare:

$$k_\infty = \left.\frac{M(s)}{sN(s)}\right|_{s\to\infty} = \frac{a_{2n}}{b_{2n-1}} \tag{60}$$

Metoda Cauer **II** constă în extragerea succesivă a polului din origine din $Z(s)$ sau $Y(s)$. Presupunând că $Z(s)$ are pol în origine, se poate scrie:

$$Z(s) = \frac{k_0^{(1)}}{s} + Z_1(s) \text{ cu } Z_1(s) = k_\infty s + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2k_\nu s}{s^2+\omega_\nu^2} \tag{61}$$

Deoarece $Z_1(s)$ are un zero în $s=0$, înseamnă că $Y_1(s)$ are un pol în $s=0$, astfel că extrăgând acest pol şi reunind cele două etape se obține:

$$Z(s) = \frac{k_0^{(1)}}{s} + \frac{1}{Y_1(s)} = \frac{k_0^{(1)}}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{k_0^{(2)}}{s} + Y_2(s)} \tag{62}$$

Repetând extragerea polului din origine şi notând $k_\infty^{(i)} = f_i$, se găseşte următoarea dezvoltare în fracție continuă:

$$Z(s) = \frac{f_1}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{f_2}{s} + \cfrac{1}{\cfrac{f_3}{s} + \ddots + \cfrac{1}{\cfrac{f_{2n}}{s}}}} \tag{63}$$

Constantele e_k, f_k sunt pozitive deoarece reprezintă reziduurile în polul de la infinit, respectiv origine ale unor funcții de reactanță. Dezvoltarea în fracție continuă (63) necesită ordonarea crescătoare a polinoamelor $M(s)$ şi $N(s)$ deoarece se calculează succesiv reziduurile în polul din origine pentru $Z(s)$, $Y(s)$ etc., reziduuri ce sunt date de raportul coeficienților termenilor de gradul cel mai mic:

$$k_o = sZ(s)\big|_{s=0} = \frac{a_o}{b_1} \tag{64}$$

Observații:

1. Sinteza Cauer prezintă marele avantaj că nu necesită factorizarea polinoamelor $M(s)$ şi $N(s)$;

2. Scrierea unei funcții $Z(s)$ sau $Y(s)$ în fracție continuă, de forma (59) sau (63), constituie condiția necesară şi suficientă ca funcția respectivă să fie funcție de reactanță. Necesitatea decurge din faptul că dezvoltările în fracție continuă pentru $Z(s)$ sau $Y(s)$ sunt consecințe ale caracterului acestora de funcții de reactanță. Suficiența se demonstrează examinând pas cu pas dezvoltările, din spate în față, cu utilizarea repetată a proprietăților **P1** şi **P2** ale funcțiilor de reactanță.

În consecință *dezvoltările în fracție continuă prin extragerea succesiva a polului de la infinit sau a celui din origine constituie două noi teste ale funcțiilor de reactanță*, foarte comode şi utile în special în situația în care factorizările solicitate de testele 1 si 2 din paragraful **2.2.5** nu sunt disponibile.
3. Uniporții rezultați prin sinteza pe baza metodelor Foster şi Cauer au număr minim de elemente de circuit şi din acest motiv realizările corespunzatoare se numesc *canonice*.
4. Dacă un uniport LC conține inductanțe mutuale, scriind impedanța $Z(s)$ sau admitanța $Y(s)$ şi resintetizând-o cu una din metodele Foster sau Cauer, în schemă nu vor mai apare inductanțele mutuale. Ca atare pentru orice uniport LC cu inductanțe mutuale se pot găsi totdeauna uniporți echivalenți fără inductanțe mutuale.
5. Metodele Foster şi Cauer pot fi combinate, rezultând astfel şi alți uniporți echivalenți.

2.2.7. Normarea frecvențelor şi a impedanțelor

Normarea frecvențelor se realizează prin raportarea acestora la o frecvență de referință adecvat aleasă. *Normarea impedanțelor* înseamnă raportarea impedanțelor la o impedanță de referință, de natură rezistivă. Scopurile urmărite prin operațiile de normare sunt:
- simplificarea expresiilor analitice şi a calculelor;
- generalizarea rezultatelor obținute.

Notând cu ω_0 şi R_0 frecvența de referință şi impedanța de referință, relațiile de normare a frecvenței complexe s şi a impedanțelor $Z_k(s)$ sunt:

$$s_n = \frac{s}{\omega_o} \quad ; \quad \underline{Z}(s_n) = Z(s)\big|_{s=s_n\cdot\,\omega_o} \quad ; \quad z(s_n) = \frac{\underline{Z}(s_n)}{R_o} \tag{65}$$

Utilizând relațiile (65) se pot determina *expresiile valorilor normate ale elementelor de circuit* (l_k, c_k, r_k) corespunzătoare valorilor nenormate (L_k, C_k, R_k). Astfel, pentru o inductanță L_k, rezultă:

$$Z(s) = sL_k \;\; ; \;\; \underline{Z}(s_n) = s_n\omega_o L_k \;\; ; \;\; z(s_n) = \frac{\underline{Z}(s_n)}{R_o} = s_n \cdot \frac{\omega_o L_k}{R_o} \tag{66}$$

Daca se notează cu l_k valoarea inductanței normate:

$$l_k = \frac{\omega_o L_k}{R_o} \tag{67}$$

atunci impedanța normată are aceeaşi formulă ca impedanța nenormată, doar că se înlocuiesc mărimile nenormate cu cele normate, adică:

$$z(s_n) = s_n \cdot l_k \tag{68}$$

Repetând procedura de conservare a expresiilor analitice după normare pentru impedanțele unei rezistențe R_k, respectiv a unui condensator C_k, se obțin valorile normate

$$r_k = \frac{R_k}{R_o} \quad ; \qquad c_\mathrm{k} = C_k \cdot \omega_o R_o \tag{69}$$

Expresiile (67) şi (69) evidenţiază caracterul adimensional al elementelor de circuit normate. De asemenea ele permit obţinerea relaţiilor de denormare (revenirea la valorile reale, exprimate în $[\Omega],[\mathrm{H}],[\mathrm{F}]$):

$$R_k = r_k \cdot R_o \;; \quad L_\mathrm{k} = l_k \cdot \frac{R_o}{\omega_o} \;; \quad C_\mathrm{k} = c_k \cdot \frac{1}{R_o \omega_o} \tag{70}$$

Observaţie: În majoritatea problemelor de realizabilitate şi sinteză, funcţiile de circuit date spre examinare sunt funcţii ale unor circuite cu valori normate, iar circuitele sintetizate (uniporţi sau diporţi) au elementele de circuit normate, adică adimensionale. De asemenea pentru simplificarea scrierii se va renunţa la indicele *n* pentru etichetarea frecvenţei complexe normate s_n.

2.2.8. Testul Hurwitz

Fie $\psi(s) = M(s)/N(s)$ o funcţie de reactanţă. Funcţia:

$$F(s) = 1 + \psi(s) = 1 + \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s) + N(s)}{N(s)} = \frac{P(s)}{N(s)} \tag{71}$$

este o funcţie pozitiv-reală, ea fiind suma a două funcţii pozitiv-reale. Ca atare, conform proprietăţii **P6**, polinomul $P(s)$, ce reprezintă suma dintre numărătorul şi numitorul unei funcţii de reactanţă, este un polinom Hurwitz. Mai mult, deoarece din (71):

$$\Re e\{F(j\omega)\} = 1 > 0 \quad \text{pentru} \quad \forall \omega \tag{72}$$

rezultă că $F(s)$ nu poate fi nul la nici o frecvenţă de pe axa $\{j\omega\}$ şi deci $P(s)$ nu are zerouri pe $\{j\omega\}$. În consecinţă $P(s)$ este polinom strict Hurwitz.

Se poate demonstra de asemenea că dacă $P(s) = M(s) + N(s)$ este un polinom strict Hurwitz, atunci raportul $M(s) / N(s)$ este o funcţie de reactanţă. În acest scop se arată că $1/F(s) = N(s) / M(s)$ satisface cele 4 condiţii necesare şi suficiente ce formează testul Guillemin al funcţiilor pozitiv-reale. Rezultă că şi $F(s)$ este pozitiv-reală. Ca atare $N(s)$ este polinom Hurwitz degenerat (cu zerouri simple numai pe $j\omega$).

În final se arată că $\Psi(s) = M(s) / N(s)$ este funcţie de reactanţă, ea îndeplinind cele 3 condiţii din testul 1 al funcţiilor de reactanţă (52): condiţiile 1 şi 3 sunt evident satisfăcute iar condiţia 2 este îndeplinită deoarece din (71) rezultă că $F(s)$ şi $\Psi(s)$ au aceleaşi reziduuri în polii de pe axa imaginară.

Concluzia importantă care se degajă din cele expuse anterior este că a verifica caracterul Hurwitz al unui polinom $P(s) = M(s) + N(s)$ este echivalent cu a verifica caracterul de funcţie de reactanţă pentru funcţia asociată $\Psi(s) = M(s) / N(s)$. În acest scop se utilizează dezvoltarea în fracţie continuă de forma (59), care poartă denumirea de *test Hurwitz* al polinomului $P(s)$.

Observații:

1. Fie $P_1(s) = M_1(s) + N_1(s)$ un polinom strict Hurwitz şi:

$$P_2(s) = (s^2 + \omega_1^2)P_1(s) = M_2(s) + N_2(s) \tag{73}$$

cu polinoamele:

$$M_2(s) = (s^2 + \omega_1^2)M_1(s) \quad ; \quad N_2(s) = (s^2 + \omega_1^2)N_1(s)$$

$P_2(s)$ este un polinom Hurwitz degenerat. Testul Hurwitz al polinomului $P_1(s)$, care constă în dezvoltarea în fracție continuă a funcției $\Psi_1(s) = M_1(s) / N_1(s)$ va avea o lungime normală (egală cu gradul funcției $\Psi_1(s)$, acelaşi cu gradul lui $P_1(s)$) şi toți coeficienții pozitivi pentru câturile parțiale obtinuțe: $e_k > 0$. Pentru polinomul $P_2(s)$, testul Hurwitz, care constă în dezvoltarea în fracție continuă a funcției $\Psi_2(s) = M_2(s) / N_2(s)$ se va termina prematur, deoarece $M_2(s)$ şi $N_2(s)$ au divizorul comun $s^2 + \omega_1^2$, iar testul Hurwitz nu este altceva decât algoritmul lui Euclid aplicat pentru aflarea celui mai mare divizor comun al polinoamelor $M_2(s)$ şi $N_2(s)$: ultimul împărțitor care a condus la rest zero este cel mai mare divizor comun. Mai mult, câturile parțiale ale dezvoltării în fracție continuă pentru $\Psi_2(s)$ sunt aceleaşi cu câturile parțiale ale dezvoltării lui $\Psi_1(s)$.

2. Dacă $s = j\omega_v$ este un zero pentru $P(s)$, atunci acesta este un zero atât pentru partea pară $M(s)$ cât şi pentru cea impară $N(s)$:

$$P(j\omega_v) = 0 \quad \Rightarrow \quad M(j\omega_v) = 0 \;\; \text{şi} \;\; N(j\omega_v) = 0 \tag{74}$$

În consecință zerourile de pe $\{j\omega\}$ ale polinomului $P(s)$ vor apare ca factori în cel mai mare divizor comun al polinoamelor $M(s)$ şi $N(s)$ şi deci vor fi puse în evidența de testul Hurwitz.

3. *Testul Hurwitz* al polinomului $P(s)$ constă în dezvoltarea în fracție continuă, de forma (59), a funcției $\psi(s) = M(s) / N(s)$ sau $\psi(s) = N(s) / M(s)$ dacă grad $\{N\}$ > grad $\{M\}$.
Sunt posibile următoarele situații:
a) dezvoltarea are lungime normală şi toți coeficienții l_k sunt pozitivi. În această situație $P(s)$ este *polinom strict Hurwitz*;
b) dezvoltarea conține unul sau mai mulți coeficienți negativi. Polinomul $P(s)$ *nu este Hurwitz*.
c) dezvoltarea se termină prematur. Dacă toți coeficienții l_k sunt pozitivi şi zerourile celui mai mare divizor comun sunt simple, situate pe axa imaginară, *polinomul este Hurwitz în sens larg.*

4. *Testul Hurwitz* se utilizează deopotrivă pentru verificarea stabilității sistemelor liniare şi invariante în timp. Dacă funcția de transfer $H(s) = P(s) / Q(s)$ are polinomul $Q(s)$ strict Hurwitz, înseamnă că $H(s)$ are toți polii în *SPS* şi sistemul este *strict stabil*. Dacă polinomul $Q(s)$ este Hurwitz în sens larg, sistemul este *stabil în sens larg*.

2.2.9. Uniporți RC. Funcții *RCZ*, funcții *RCY*

Funcțiile de impedanță ale uniporților *RC*, denumite funcții *RCZ*, nu mai au aceleaşi proprietăți ca funcțiile de admitanță ale uniporților *RC*, denumite funcții *RCY*. Se poate stabili o corespondență biunivocă între uniporții *RC* şi uniporții *LC*. Pe baza acestei corespondențe se pot stabili relațiile de transfer a unei impedanțe $Z_{LC}(s)$ într-o impedanță $Z_{RC}(s)$ şi invers. Transformarea unui uniport *RC* într-un uniport *LC* se poate face parcurgând trei etape:

1. Se multiplică cu *k* toate impedanțele componente R_i şi $1/sC_i$ ale uniportului *RC*. Aceasta conduce la uniportul cu impedanța $kZ_{RC}(s)$.
2. Se multiplică cu *k* numai condensatoarele C_i. Multiplicarea este echivalentă cu schimbarea variabilei *s* în variabila *ks* şi drept urmare uniportul va avea impedanța $kZ_{RC}(ks)$.
3. Se face înlocuirea *k* = *s* rezultând uniportul cu impedanța $s\,Z_{RC}(s^2)$.

Uniportul final este evident un uniport *LC* cu $L_i = R_i$. Reunind transformările rezultă:

$$Z_{RC}(s) \xrightarrow{1} kZ_{RC}(s) \xrightarrow{2} kZ_{RC}(ks) \xrightarrow{3} sZ_{RC}(s^2) = Z_{LC}(s) \qquad (75)$$

Deci corespondența între uniporții *LC* şi *RC* este redată matematic prin transformările:

$$Z_{LC}(s) = sZ_{RC}(s^2) \qquad (76)$$

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} Z_{LC}(\sqrt{s}) \qquad (77)$$

Prin definiție, o impedanță *Z*(*s*) care prin transformarea (76) conduce la o funcție de reactanță se numeşte funcție *RCZ*, adică funcție de impedanță *RC*.

Proprietăți ale funcțiilor *RCZ*. Metode de testare

Se deduc din proprietățile funcțiilor de reactanță, utilizând transformarea (77).

P1. *Dacă* $Z_1(s)$ *şi* $Z_2(s)$ *sunt funcții RCZ, atunci suma* $Z(s) = Z_1(s) + Z_2(s)$ *este o funcție RCZ*;

P2. *Dacă* $Z(s)$ *şi* $w(s)$ *sunt funcții RCZ, atunci şi funcția* $Z(w(s))$ *este funcție RCZ*;

P3. *Orice funcție RCZ se poate pune sub forma*:

$$Z_{RC}(s) = \frac{h_o}{s} + h_\infty + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_\nu}{s+\sigma_\nu} \qquad (78)$$

Dezvoltarea în fracții elementare a funcției $Z_{RC}(s)$, dată în relația (78) se obține prin aplicarea transformării (77) în dezvoltarea omoloagă a funcției $Z_{LC}(s)$ din relația (54), cu introducerea notațiilor:

$$\sigma_\nu = \omega_\nu^2 > 0 \quad ; \quad h_\nu = 2k_\nu \geq 0 \quad ; \quad h_o = k_o \geq 0 \quad ; \quad h_\infty = k_\infty \geq 0 \qquad (79)$$

Unii din termenii dezvoltării (78) pot lipsi, fapt evidențiat în notațiile (79) prin posibilitatea ca unele reziduuri să fie nule.

Aşa cum scrierea unei funcţii Z(s) în forma (44) sau (54) reprezintă condiţia necesară şi suficientă pentru ca acea funcţie să fie funcţie de reactanţă, tot astfel, scrierea unei impedanţe Z(s) în forma (78) reprezintă condiţia necesară şi suficientă pentru ca Z(s) să fie o funcţie $Z_{RC}(s)$. Rezultă de aici:

Testul 1 pentru funcţiile $Z_{RC}(s)$

O funcţie Z(s) este de tip $Z_{RC}(s)$ *dacă şi numai dacă*:

1. Z(s) *este funcţie raţională, reală pentru s real;*

2. Z(s) *are toţi polii numai pe semiaxa negativă a planului "s", adică pe* $\{-\sigma\}$*; polii sunt simpli şi cu reziduurile pozitive;*

3. $h_\infty \geq 0$ unde $h_\infty = \lim\limits_{s\to\infty} Z(s)$ (80)

P4. *Orice funcţie* $Z_{RC}(s)$ *se poate scrie în forma factorizată*:

$$Z_{RC}(s) = H\frac{(s+\sigma_{01})(s+\sigma_{02})\cdots(s+\sigma_{0n})\overline{(s+\sigma_{0,n+1})}}{s(s+\sigma_{x1})(s+\sigma_{x2})\cdots(s+\sigma_{xn})} \tag{81}$$

cu:

$$H > 0 \text{ si } 0 \leq \sigma_{01} < \sigma_{x1} < \sigma_{02} < \sigma_{x2} < \cdots < \sigma_{0n} < \sigma_{xn} < \sigma_{0,n+1} < \infty \tag{82}$$

Expresia (81) se obţine din forma factorizată (49) a funcţiei de reactanţă $Z_{LC}(s)$, căreia i se aplică transformarea (77) şi cu introducerea notaţiilor:

$$\sigma_{0i} = \omega_{0i}^2 > 0 \quad ; \quad \sigma_{xi} = \omega_{xi}^2 > 0 \tag{83}$$

Ultimul factor de la numărătorul relaţiei (81) poate lipsi. De asemenea, aşa cum scrierea unei funcţii Z(s) în forma factorizată (49) era condiţie necesară şi suficientă pentru ca acea funcţie să fie funcţie de reactanţă, tot astfel, scrierea unei funcţii Z(s) în forma factorizată (81) reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca Z(s) să fie o funcţie $Z_{RC}(s)$. Rezultă prin urmare:

Testul 2 pentru funcţiile $Z_{RC}(s)$

O funcţie Z(s) *este de tip* $Z_{RC}(s)$ *dacă şi numai dacă*:

1. Z(s) *este funcţie raţională, reală pentru s real*;

2. Z(s) *are pz-urile simple şi alternante pe* $\{-\sigma\}$;

3. *Constanta de multiplicare H este pozitivă*;

4. *Cea mai apropiată frecvenţă critică de origine este un pol, care poate fi şi în origine*. (84)

P5. *Fiecare termen din dezvoltarea în fracţii elementare* (9.88) *este o funcţie RCZ,* provenind fiecare prin transformarea unei funcţii de reactanţă elementare.

P6. *Dacă* Z(s) = P(s) / Q(s) şi *m = grad* {P}, *n = grad* {Q}, *atunci sunt posibile relaţiile dintre grade*:

a) $m = n$ dacă există termenul h_∞ în relația (78);
b) $m = n - 1$ dacă $h_\infty = 0$ în relația (78).
Prin urmare o funcție $Z_{RC}(s)$ nu poate avea pol la infinit.

Proprietăți ale funcțiilor *RCY*. Metode de testare

Prin exprimarea impedanțelor în funcție de admitanțele corespunzătoare, adică:

$$Z_{LC}(s) = \frac{1}{Y_{LC}(s)} \quad ; \quad Z_{RC}(s) = \frac{1}{Y_{RC}(s)} \tag{85}$$

transformările (76) şi (77) devin:

$$Y_{LC}(s) = \frac{1}{s} Y_{RC}(s^2) \tag{86}$$

$$Y_{RC}(s) = \sqrt{s} \cdot Y_{LC}(\sqrt{s}) \tag{87}$$

Prin definiție, o admitanță $Y(s)$ care prin transformarea (86) conduce la o funcție de reactanță (admitanța $Y_{LC}(s)$) se numeşte funcție *RCY* (sau funcție de admitanță $Y_{RC}(s)$). Spre deosebire de admitanța $Y_{LC}(s)$, care are exact aceleaşi proprietăți ca şi impedanța $Z_{LC}(s)$, funcția *RCY* nu are aceleaşi proprietăți ca funcția *RCZ*.

Proprietăți ale funcțiilor *RCY*

Se obțin din proprietățile funcțiilor de reactanță, prin utilizarea relației de transformare (87).
P1. *Dacă* $Y_1(s)$ *şi* $Y_2(s)$ *sunt funcții RCY, atunci suma* $Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$ *este de asemenea o funcție RCY*;
P2. *Dacă* $Y(s)$ *şi* $w(s)$ *sunt funcții RCY, atunci şi funcția* $Y(w(s))$ *este funcție RCZ*;
P3. *Orice funcție RCY se poate descompune în forma*:

$$Y_{RC}(s) = h_o + h_\infty s + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_\nu s}{s + \sigma_\nu} \tag{88}$$

Această exprimare se obține prin aplicarea relației de transformare (87) în dezvoltarea în fracții elementare a funcției $Y_{LC}(s)$ din relația (56), cu introducerea aceloraşi notații din (83). Fiecare termen al dezvoltării (88) este o funcție *RCY*, provenind din termenul omolog al dezvoltării (56), de tip $Y_{LC}(s)$. Dezvoltarea (88) nu este o dezvoltare în fracții elementare a funcției $Y(s)$. Dacă însă împărțim cu "s" ambii membri din relația (88), aceasta devine:

$$\frac{Y_{RC}(s)}{s} = \frac{h_o}{s} + h_\infty + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_\nu}{s + \sigma_\nu} \tag{89}$$

Scrierea unei funcții în forma (89), care este evident o descompunere în fracții elementare, constituie condiția necesară şi suficientă pentru ca admitanța $Y(s)$ să fie o funcție de tip $Y_{RC}(s)$. Rezultă de aici:

Testul 1 pentru funcțiile $Y_{RC}(s)$

O funcție $Y(s)$ *este de tip* $Y_{RC}(s)$ *dacă și numai dacă*:

1. $Y(s)$ *este funcție rațională, reală pentru s real*;

2. $Y(s)/s$ *are toți polii numai pe semiaxa negativă* $\{-\sigma\}$, *simpli și cu reziduurile pozitive*;

3. $h_\infty \geq 0$ unde $h_\infty = \lim_{s\to\infty} Y(s)/s$ (90)

P4. *Reziduurile în polii finiți* $s_\nu = -\sigma_\nu$ *ai unei funcții* $Y_{RC}(s)$ *sunt negative*. Fie descompunerea în fracții elementare a funcției $Y_{RC}(s)$

$$Y_{RC}(s) = h_o^{'} + h_\infty^{'} s + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_\gamma^{'}}{s+\sigma_\nu} \tag{91}$$

Prin compararea relațiilor de calcul ale constantelor h_ν din relația (89) și $h_\nu^{'}$ din (91):

$$h_\nu = \frac{s+\sigma_\nu}{s} Y_{RC}(s)\bigg|_{s=-\sigma_\nu} \quad ; \quad h_\nu^{'} = (s+\sigma_\nu) Y_{RC}(s)\big|_{s=-\sigma_\nu} \tag{92}$$

rezultă:

$$h_\nu^{'} = -\sigma_\nu h_\nu < 0 \tag{93}$$

Evaluând funcția $Y_{RC}(s)$ pentru $s = 0$ și $s \to \infty$ în (88) și (91) se obțin relațiile dintre $h_o, h_o^{'}$, respectiv h_∞ și $h_\infty^{'}$ anume:

$$\begin{aligned} h_o &= h_o^{'} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_\nu^{'}}{\sigma_\nu} = Y_{RC}(0) \\ h_\infty &= h_\infty^{'} = \frac{Y_{RC}}{s}\bigg|_{s\to\infty} \end{aligned} \tag{94}$$

Observație: Deși dezvoltarea (91) este o dezvoltare în fracții elementare a funcției $Y_{RC}(s)$, ea nu este utilă pentru sinteză întrucât cele “ *n* “ fracții elementare referitoare la polii $s_\nu = -\sigma_\nu$ nu sunt funcții *RCY*.

P5. *Orice funcție* $Y_{RC}(s)$ *se poate scrie sub forma factorizată*:

$$Y_{RC}(s) = H \frac{(s+\sigma_{01})(s+\sigma_{02})\cdots(s+\sigma_{0n})\overline{(s+\sigma_{0,n+1})}}{(s+\sigma_{x1})(s+\sigma_{x2})\cdots(s+\sigma_{xn})} \tag{95}$$

cu:

$$H > 0 \text{ si } 0 \leq \sigma_{01} < \sigma_{x1} < \cdots < \sigma_{0n} < \sigma_{xn} < \sigma_{0,n+1} < \infty$$

Expresia (95) se obține din forma factorizată (49) a funcției de reactanță $Y_{LC}(s)$, căreia i se aplică transformarea (87) şi notațiile (83). Factorul subliniat de la numărător poate lipsi. Scrierea unei funcții de admitanță în forma factorizată (95) reprezintă condiția necesară şi suficientă pentru a fi o funcție $Y_{RC}(s)$. S-a obținut astfel:

Testul 2 pentru funcțiile $Y_{RC}(s)$

O funcție $Y(s)$ *este de tip* $Y_{RC}(s)$ *dacă şi numai dacă*:

1. $Y(s)$ *este o funcție rațională, reală pentru s real*;

2. $Y(s)$ *are pz-urile simple şi alternante pe* $\{-\sigma\}$; (96)

3. *Constanta de multiplicare H este pozitivă*;

4. *Cea mai apropiată frecvență critică de origine este un zero, care poate fi şi în origine*.

P6. *Dacă* $Y(s) = P(s)/Q(s)$ *şi m = grad {P}, n = grad {Q}, atunci sunt posibile relațiile dintre grade*:
a) *m = n dacă* $h_\infty = 0$ *în dezvoltarea* (88);
b) *m = n+1 dacă* $h_\infty \neq 0$ *în dezvoltarea* (88).

2.2.10. Sinteza uniporților RC

Este omoloagă cu cea a uniporților *LC*. Metodele de sinteză pot fi clasificate în două categorii:
a) *metode indirecte*;
b) *metode directe*.

Metodele indirecte constau în determinarea funcției de reactanță $Z_{LC}(s)$ prin utilizarea transformării (76), sinteza uniportului *LC* cu metodele Foster şi Cauer, urmată apoi de înlocuirea inductanțelor L_i cu rezistențele $R_i = L_i$.

Observație: Dacă sinteza s-a realizat pe funcția normată, atunci $l_i \to r_i = l_i$ iar dacă sinteza s-a realizat pe funcția nenormată, atunci $L_i[H] \to R_i[\Omega] = L_i[H]$.

Metodele directe pot fi metode de tip Foster, respectiv metode de tip Cauer, întocmai ca la sinteza funcțiilor de reactanță.

***Metoda Foster* I** se bazează pe dezvoltarea funcției de impedanță într-o sumă de fracții elementare, realizarea fiecărei fracții printr-un uniport *RC* elementar şi apoi conectarea în serie a uniporților elementari. Prelucrând dezvoltarea (78), se obține:

$$Z(s) = \frac{h_o}{s} + h_\infty + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_\nu}{s+\sigma_\nu} = \frac{h_o}{s} + h_\infty + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\frac{s}{h_\nu} + \frac{\sigma_\nu}{h_\nu}} \qquad (97)$$

cu:

$$h_o = s \cdot Z(s)\big|_{s=0} \;;\; h_\infty = \lim_{s\to\infty} Z(s) \;;\; h_\nu = (s+\sigma_\nu)\cdot Z(s)\big|_{s=-\sigma_\nu} \qquad (98)$$

***Metoda Foster* II** constă în dezvoltarea funcției $Y(s)/s$ în fracții elementare (forma 89), urmată de obținerea prin multiplicare cu "*s*" a formei (88) pentru $Y(s)$:

$$Y(s) = h_o + h_\infty s + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h_\nu s}{s+\sigma_\nu} = h_o + h_\infty s + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{h_\nu} + \frac{\sigma_\nu}{h_\nu s}} \tag{99}$$

Se realizează apoi fiecare termen din ultimul membru al relației (99) printr-un uniport elementar *RC*, după care, se conectează aceşti uniporți în paralel.

***Metoda Cauer* I** constă în dezvoltarea în fracție continuă a funcției de impedanță sau admitanță, cu extragerea succesivă a polului de la "∞". Forma fracției continue pentru $Z_{RC}(s)$ sau $Y_{RC}(s)$ se obține prin introducerea transformării (77), respectiv (87) în dezvoltările în fracție continuă de forma (59), scrise pentru $Z_{LC}(s)$ sau $Y_{LC}(s)$. Astfel, dacă se aplică transformarea (77) în dezvoltarea în fracție continuă a fracției $Z_{LC}(s)$ dată de (59), aceasta devine:

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} Z_{LC}(\sqrt{s}) = e_1 + \cfrac{1}{e_2 s + \cfrac{1}{e_3 + \cfrac{1}{e_4 s + \ddots + \cfrac{1}{e_{2n} s}}}} \tag{100}$$

Observație: Dezvoltarea în fracție continuă (100) evidentiază faptul că se obțin succesiv câturi de forma $e_1, e_3, ..., e_{2n-1}$ forma $e_2 s, e_4 s, ..., e_{2n} s$ în etapele în care funcția rest este o funcție de admitanță. Rezultatul era aşteptat deoarece numai $Y_{RC}(s)$ are pol la "∞" în timp ce $Z_{RC}(s)$ nu are pol la "∞".

***Metoda Cauer* II** constă în dezvoltarea în fracție continuă a funcției de impedanță sau admitanță, cu extragerea succesivă a polului din origine. Forma fracției continue pentru $Z_{RC}(s)$ sau $Y_{RC}(s)$ se obține prin introducerea transformării (77), respectiv (87) în dezvoltările în fracție continuă de forma (63), scrise pentru $Z_{LC}(s)$ sau $Y_{LC}(s)$, după cum $Z_{LC}(s)$ avea pol în origine, respectiv $Y_{LC}(s)$ avea pol în origine. Presupunând că $Z_{LC}(s)$ avea pol în origine şi deci o dezvoltare de forma (63), introducând transformarea (77), aceasta ia forma:

$$Z_{RC}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} Z_{LC}(\sqrt{s}) = \frac{f_1}{s} + \cfrac{1}{f_2 + \cfrac{1}{\cfrac{f_3}{s} + \cfrac{1}{f_4 + \ddots + \cfrac{1}{f_{2n}}}}} \tag{101}$$

Observație: Câturile sunt de forma f_i / s în etapele în care extragerea se aplică unor funcții de impedanță, respectiv de forma f_i în etapele în care extragerea se aplică unor funcții de admitanță. Aceasta deoarece funcția *RCZ* poate avea pol în origine în timp ce funcția *RCY* nu poate avea un astfel de pol.

2.2.11. Uniporți RL. Funcții *RLZ*, funcții *RLY*

Se poate stabili o corespondență biunivocă între uniporții *RL* şi uniporții *LC* aplicând o procedură similară cu cea prezentată în paragraful 2.2.9. Pe baza acestei corespondențe se pot stabili relațiile de transformare a unei impedanțe $Z_{RL}(s)$ într-o impedanță $Z_{LC}(s)$ şi invers. Transformarea unui uniport *RL* într-un uniport *LC* se poate realiza în trei etape:

1. Se multiplică cu $1/k$ toate impedanțele componente R_i şi sL_i ale uniportului *RL*. Această multiplicare conduce la uniportul cu impedanța $(1/k)\cdot Z_{RL}(s)$.
2. Se multiplică cu k numai impedanțele L_i. Multiplicarea aceasta este echivalentă cu schimbarea variabilei s în variabila ks şi în consecință uniportul va avea impedanța $(1/k)\cdot Z_{RL}(ks)$.
3. Se face înlocuirea $k = s$ şi schema se transformă în cea cu impedanța $(1/s)\cdot Z_{RL}(s^2)$. Acest uniport final este un uniport *LC* cu $C_i = 1/R_i$, justificarea fiind dată de expresiile impedanțelor elementare ce compun uniportul.

Reunind transformările parcurse în cele trei etape rezultă:

$$Z_{RL}(s) \xrightarrow{(1)} \frac{1}{k} Z_{RL}(s) \xrightarrow{(2)} \frac{1}{k} Z_{RL}(ks) \xrightarrow{(3)} \frac{1}{s} Z_{RL}(s^2) = Z_{LC}(s) \tag{105}$$

Corespondența între uniporții *RL* şi *LC* este exprimată matematic prin transformările:

$$Z_{LC}(s) = \frac{1}{s} Z_{RL}(s^2) \tag{106}$$

$$Z_{RL}(s) = \sqrt{s}\cdot Z_{LC}(\sqrt{s}) \tag{107}$$

Prin utilizarea admitanțelor $Y_{LC}(s), Y_{RL}(s)$, în relațiile de mai sus acestea iau forma:

$$Y_{RL}(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} Y_{LC}(\sqrt{s}) \tag{108}$$

$$Y_{LC}(s) = sY(s^2) \tag{109}$$

Dacă se compară transformările (107) cu (87) şi (108) cu (77), ținând cont de asemenea că funcțiile $Z_{LC}(s)$ şi $Y_{LC}(s)$ au exact aceleaşi proprietăți, rezultă următoarele concluzii foarte importante:

- Funcția $Z_{RL}(s)$ are aceleaşi proprietăți şi aceleaşi metode de testare cu funcția $Y_{RC}(s)$;

- Funcția $Y_{RL}(s)$ are aceleaşi proprietăți şi aceleaşi metode de testare cu funcția $Z_{RC}(s)$.

Sinteza uniporților RL

Ca şi în cazul uniporților *RC*, metodele de sinteză pot fi clasificate în *metode directe şi metode indirecte.*

Metodele indirecte constau în determinarea funcţiei de reactanţă $Z_{LC}(s)$ pe baza transformării (106), sinteza uniportului LC cu metodele Foster şi Cauer şi apoi înlocuirea condensatoarelor C_i cu rezistenţe $R_i = 1/C_i$.

Metodele directe de tip Foster şi Cauer decurg după aceleaşi proceduri prezentate la sinteza uniporţilor RC, cu următoarea menţiune importantă: funcţia $Z_{RL}(s)$ are proprietăţile funcţiei $Y_{RC}(s)$, astfel că dezvoltarea funcţiei $Z_{RL}(s)$ conduce la fracţii elementare cu reziduuri negative în polii finiţi de pe $\{-\sigma\}$. În consecinţă, similar ca la funcţia $Y_{RC}(s)$, unde la metoda Foster II se dezvoltă $Y(s)/s$ în fracţii elementare, în cazul uniporţilor RL, la metoda de sinteză Foster I se dezvoltă în fracţii elementare funcţia $Z_{RL}(s)/s$.

2.2.12. Sinteza uniporţilor RLC

Dacă funcţia $Z(s)$ este pozitiv-reală, dar nu este o funcţie $Z_{LC}(s)$, $Z_{RC}(s)$, $Z_{RL}(s)$, înseamnă că ea este de tip $Z_{RLC}(s)$. Sinteza unei funcţii $Z_{RLC}(s)$ sau $Y_{RLC}(s)$ începe totdeauna cu *preambulul Foster* care constă în extragerea polilor de pe axa $\{j\omega\}$ din funcţia de impedanţă $Z(s)$ sau din funcţia de admitanţă $Y(s)$. Presupunând că $Z(s)$ are poli pe $\{j\omega\}$, atunci, conform proprietăţii **P8** a funcţiilor pozitiv-reale:

$$Z(s) = Z_A(s) + Z_1(s) \tag{110}$$

unde $Z_A(s)$ este o funcţie $Z_{LC}(s)$, având dezvoltarea în fracţii elementare de forma (54), iar $Z_1(s)$ este analitică în *SPD* şi pe axa $\{j\omega\}$. Impedanţa $Z_1(s)$ nu mai are poli pe axa imaginară, în schimb admitanţa $Y_1(s)$ poate avea astfel de poli şi în consecinţă se poate de asemenea descompune conform relaţiei (110):

$$Y_1(s) = Y_B(s) + Y_2(s) \tag{111}$$

Procedura se repetă până se ajunge la o funcţie $Z_\alpha(s)$ care nu mai are nici poli, nici zerouri pe axa $\{j\omega\}$. O funcţie de impedanţă (aşa cum este $Z_1(s)$) care nu mai are poli pe axa imaginară se numeşte funcţie de *reactanţă minimă*. O funcţie de impedanţă fără zerouri pe axa imaginară, deci admitanţa fără poli pe această axă (aşa cum este $Z_2(s)$), se numeşte funcţie de *susceptanţă minimă*. O funcţie de impedanţă care nu mai are nici poli, nici zerouri pe axa imaginară, aşa cum este $Z_\alpha(s)$, se numeşte *funcţie de reactanţă şi susceptanţă minimă.* Reunind dezvoltările corespunzătoare repetării preambulului Foster, de forma (110) şi (111), se obţine pentru $Z(s)$ fracţia continuă:

$$Z(s) = Z_A(s) + \cfrac{1}{Y_B(s) + \cfrac{1}{Z_C(s) + \ddots + \cfrac{1}{Z_\alpha(s)}}} \tag{112}$$

Acesteia îi corespunde un uniport în scară, la care funcţiile de reactanţă succesive: $Z_A(s)$, $Y_B(s)$,…. etc., se sintetizează prin uniporţi *LC*, de tip Foster sau Cauer.

Observație:

Uneori, prin aplicarea repetată a preambulului Foster se poate ajunge la o funcție $Z_\alpha(s) = Z_{RC}(s)$ sau $Z_\alpha(s) = Z_{RL}(s)$. În aceste cazuri sinteza poate fi considerată terminată întrucât pentru $Z_\alpha(s)$ se aplică procedurile de sinteză specifice uniporților *RC*, respectiv uniporților *RL*. În cazul general funcția $Z_\alpha(s)$, de minimă reactanță și minimă susceptanță, este o funcție $Z_{RLC}(s)$. Găsirea uniportului corespunzător se face cu una din metodele specifice de sinteză a uniporților *RLC*, cum ar fi: *metoda Brune*, *metoda Darlington*, *metoda Bott şi Duffin, metoda Miyata, etc.* ce pot fi consultate în următoarele lucrări de specialitate:

1. Mateescu Ad., "*Semnale, circuite şi sisteme*", Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.

2. Mateescu Ad., **Dumitriu N., Stanciu L.,** "*Semnale, circuite şi sisteme. Aplicații în filtrarea semnalelor*", Editura Teora, 2001.